NOMBRES EN ECRITURE FRACTIONNAIRE

1) Définition d'un quotient – égalité de deux quotients

Définition

a et *b* désignent deux nombres relatifs avec $b \neq 0$. On appelle quotient de *a* par *b* le nombre qui, multiplié par *b* donne *a*. On note ce nombre $\dfrac{a}{b}$. On a donc la relation fondamentale : $\dfrac{a}{b} \times b = a$.

a est appelé numérateur, *b* est appelé dénominateur.

Exemple

Le quotient de 2 par 7 se note $\dfrac{2}{7}$ et on a $\dfrac{2}{7} \times 7 = 2$.

Propriété 1

Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas quand on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même nombre :

a, *b* et *k* étant des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$, on a : $\dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a}{b}$.

Cette propriété est utile pour simplifier des fractions, par exemple : $\dfrac{45}{60} = \dfrac{15 \times 3}{15 \times 4} = \dfrac{3}{4}$.

La propriété 1 est également utile pour réduire des fractions au même dénominateur, par exemple : réduire au même dénominateur $\dfrac{7}{5}$ et $\dfrac{3}{2}$. Choisissons comme dénominateur commun 10 :

$\dfrac{7}{5} = \dfrac{7 \times 2}{5 \times 2} = \dfrac{14}{10}$ et $\dfrac{3}{2} = \dfrac{3 \times 5}{2 \times 5} = \dfrac{15}{10}$.

2) Addition et soustraction de quotients

Règle 1

Pour additionner deux fractions ayant le même dénominateur, on additionne les numérateurs. Pour soustraire des fractions ayant le même dénominateur, on soustrait les numérateurs.

a, *b* et *c* étant des nombres relatifs avec $c \neq 0$, on a $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$ et $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}$.

Exemples

$\dfrac{3}{7} + \dfrac{-4}{7} = \dfrac{3+(-4)}{7} = \dfrac{-1}{7}$

$\frac{2}{5}-\frac{6}{5}=\frac{2-6}{5}=\frac{-4}{5}$.

Règle 2

Pour additionner ou soustraire des fractions ayant des <u>dénominateurs différents</u>, on commence par réduire ces fractions au même dénominateur puis on applique la règle 1.

Exemple

$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3\times3}{4\times3}+\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}$.

3) Multiplication de quotients

Règle 3

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. *a*, *b*, *c* et *d* étant des nombres relatifs avec $b\neq 0$ et $d\neq 0$, on a $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Exemples

$\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{4\times3}{7\times5}=\frac{12}{35}$

$\frac{-2}{9}\times\frac{-3}{4}=\frac{(-2)\times(-3)}{9\times4}=\frac{6}{36}$ on peut bien sûr simplifier le résultat : $\frac{6}{36}=\frac{6\times1}{6\times6}=\frac{1}{6}$

4) Inverse et division de fractions

Définition

On dit que deux nombres sont <u>inverses</u> l'un de l'autre lorsque leur produit vaut 1.

Exemple

5 et $\frac{1}{5}$ sont inverses l'un de l'autre car $5\times\frac{1}{5}=1$.

Propriété 2

a et *b* étant des nombres relatifs avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$, $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont inverses l'un de l'autre.

<u>preuve</u>

$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$. $\frac{b}{a}$ est donc l'inverse de $\frac{a}{b}$.

Règle 4

Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.

a, *b*, *c* et *d* étant des nombres relatifs avec $b \neq 0$, $c \neq 0$, et $d \neq 0$, on a $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Exemples

$$\frac{2}{13} : \frac{-3}{4} = \frac{2}{13} \times \frac{4}{-3} \quad \text{(règle 4)}$$

$$= \frac{2 \times 4}{13 \times (-3)} \quad \text{(règle 3)}$$

$$= \frac{8}{-39}$$

5) Quotient égaux et produits en croix

Propriété 3

a, *b*, *c* et *d* étant des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$.

preuve

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a \times b \times d}{b} = \frac{c \times b \times d}{d} \quad \text{(on multiplie de chaque côté par } b \times d\text{)}$$

$$a \times d = b \times c \quad \text{(on simplifie les fractions obtenues).}$$

Application

Déterminer le nombre *x* tel que $\frac{4}{x} = \frac{3}{10}$.

La propriété ci-dessus donne $4 \times 10 = 3 \times x$, c'est-à-dire $3x = 40$ donc $x = \frac{40}{3}$.