

Terminale S

# **DEVOIRS MATHÉMATIQUES**

Devoirs 1 à 10

Rédaction

**Sébastien Cario**



**CNED**

AU SERVICE DE TOUTES LES RÉUSSITES

Les cours du CNED sont strictement réservés à l'usage privé de leurs destinataires et ne sont pas destinés à une utilisation collective. Les personnes qui s'en serviraient pour d'autres usages, qui en feraient une reproduction intégrale ou partielle, une traduction sans le consentement du CNED, s'exposeraient à des poursuites judiciaires et aux sanctions pénales prévues par le Code de la propriété intellectuelle. Les reproductions par reprographie de livres et de périodiques protégés contenues dans cet ouvrage sont effectuées par le CNED avec l'autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie (20 rue des Grands Augustins, 75006 Paris).

**CNED, BP 60200, 86980 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France.**

© CNED 2019

7-MA02-DV-PA-00-19



Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :

connectez-vous à votre site de formation [www.cned.fr](http://www.cned.fr) > espace inscrit

et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

**Important**

Veillez réaliser ce devoir après avoir étudié la séquence 1.

**Exercice 1 (6,5 points)****Partie A - Restitution organisée de connaissance**

On prendra comme prérequis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , les règles opératoires sur les limites et les théorèmes de comparaison à l'infini.

On rappelle l'inégalité de Bernoulli :

$$\text{pour tout } x > 0 \text{ et tout } n \text{ de } \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$$

1. À l'aide de l'inégalité de Bernoulli, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ .
2. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{(2^n)} = +\infty$ .

**Partie B**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par son premier terme  $u_0$  et par la relation de récurrence :  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - x^2$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. Cas :  $u_0 = -2$ .
  - a. Montrer, par récurrence, que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n \leq -2^{(2^n)}$ . (\*)
  - b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
  - c. À l'aide de l'inégalité (\*), trouver un rang  $n_1$  tel que pour tout  $n \geq n_1$ ,  $u_n \leq -10^{10}$ .
  - d. Dans cette question, toute trace de recherche même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.  
À l'aide d'un algorithme que l'on détaillera sur la copie et qu'on implémentera sur la calculatrice, déterminer le plus petit entier  $n_2$  tel que pour tout  $n \geq n_2$ ,  $u_n \leq -10^{10}$ .

4. Cas :  $u_0 = 0,5$ .
- Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 0,5$ .
  - En déduire que  $(u_n)$  converge.
  - Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n \leq \frac{1}{n}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Exercice 2 (4 points)

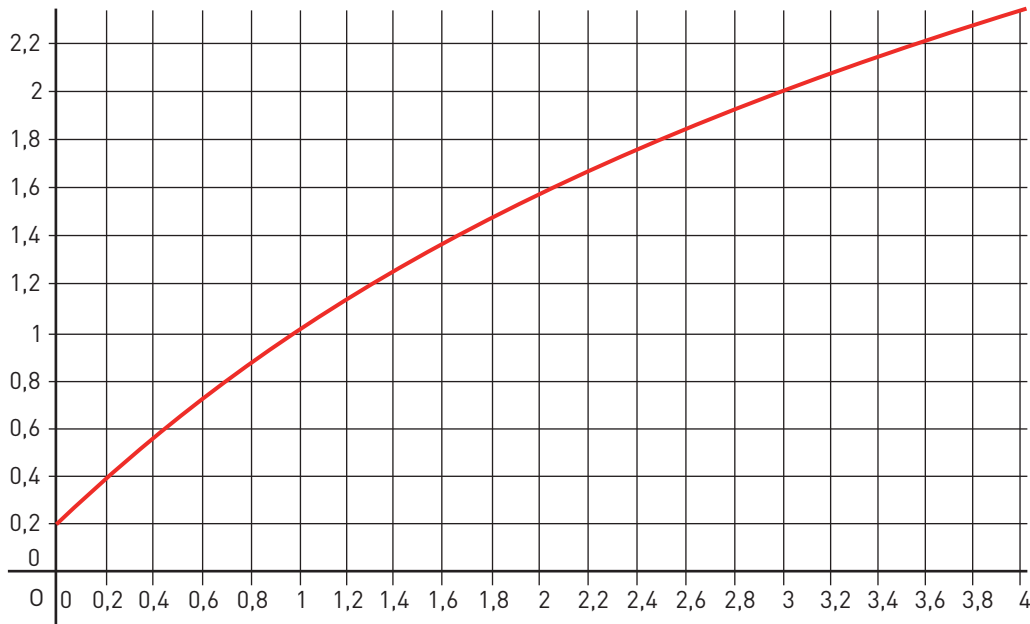
Soient  $\alpha$  un réel positif et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \alpha u_n + n + 1$  pour  $n \geq 0$ .

- On suppose que  $\alpha = 0$ .  
Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ? Que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ?
- On suppose que  $\alpha = 1$ .
  - Représenter graphiquement les 10 premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
  - Expliquer en quoi l'allure du nuage de points obtenu permet de conjecturer que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n = an^2 + bn + c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels.
  - Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  puis démontrer la formule obtenue par récurrence. Que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ?

### Exercice 3 (5,5 points)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = \frac{5u_n + 1}{u_n + 5}$  pour  $n \geq 0$ .

- Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{5x+1}{x+5}$ .
- Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on dispose ci-après de la représentation graphique de la fonction  $f$ . En laissant apparent les traits de construction, construire en abscisse les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
  - Que peut-on conjecturer quant au sens de variation et à l'éventuelle convergence de la suite  $(u_n)$  ?
- Démontrer, par récurrence, que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ .
  - Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite  $(u_n)$  ?
- Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$  pour  $n \geq 0$ .
  - Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
  - Pour tout  $n \geq 0$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$ .
  - Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$  puis conclure quant à la limite de  $(u_n)$ .



### Exercice 4 (4 points)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$ .

1. Quel est le plus petit des  $n$  termes de la somme définissant  $u_n$  ? Le plus grand ?
2. En déduire un encadrement de  $u_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
3. On dispose de l'algorithme ci-dessous.

$N \leftarrow 1$

$S \leftarrow 0,5$

Tant que  $S > 1,01$  ou  $S < 0,99$

$N \leftarrow N+1$

$S \leftarrow 0$

    Pour  $K$  de 1 à  $N$

$$S \leftarrow S + \frac{N}{N^2+K}$$

Fin de la boucle Pour

Fin du Tant que

- a. Que fait l'algorithme ci-dessus ? Autrement dit, que représente les nombres  $N$  et  $S$  obtenus en sortie ? Pourquoi peut-on affirmer que la boucle « tant que » ne tourne pas indéfiniment ?
- b. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre  $N$  renvoyé par l'algorithme.

Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :

connectez-vous à votre site de formation [www.cned.fr](http://www.cned.fr) > *espace inscrit*

et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

### Important

Veillez réaliser ce devoir après avoir étudié **la séquence 2**.

### Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte.

Vous noterez le numéro de la question, la réponse choisie ainsi qu'une justification de la réponse choisie.

#### Pour chaque question :

- il est attribué un point si la réponse est exacte avec une justification correcte ;
- il est attribué 0,5 point si la réponse est exacte avec une justification correcte mais incomplète ;
- une réponse inexacte enlève 0,5 point ;
- enfin une absence de réponse, une réponse exacte mais non justifiée ou une réponse exacte avec une justification fautive ou erronée est noté 0.

1. Que vaut  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x-3}{x^2+2x-3}$  ?

a. 2

b.  $-\infty$

c.  $+\infty$

d. 1

2. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x + \sin x}{2x + 3 \cos x}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

a.  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$

c.  $\mathcal{C}_f$  admet la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$  comme asymptote en  $+\infty$

3. Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = 2x\sqrt{2x-4}$

a.  $g'(2) = 0$

b.  $g$  n'est pas dérivable en 2

c.  $g$  n'est pas continue en 2.

4. Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = x^2 \sin(2x)$

a.  $h'(x) = 2x \cos(2x)$

b.  $h'(x) = 2x \sin(2x) + x^2 \cos(2x)$

c.  $h'(x) = 2x(\sin(2x) + x \cos(2x))$

**Exercice 2 (8 points)****Partie A - Étude d'une fonction**

Soit  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1+x}{x}(\sqrt{1+x}-1)$ .

1.

a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b. Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}$ .

c. En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

2.

a. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{1+x})^2}.$$

b. Dresser alors le tableau de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

c. Montrer que :  $f\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

**Partie B - Étude d'une suite**

Soit  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer, par récurrence, que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

2. Montrer, par récurrence, que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} < u_n$ .

3. En déduire que  $(u_n)$  converge vers un réel  $a$  solution de l'équation  $f(x) = x$ .

**Partie C - Propriété de  $a$** 

Soit  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = x^3 + x^2 - 1$ .

1. Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

2. Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ . En déduire que  $a$  est l'unique solution dans  $]0; +\infty[$  de l'équation  $g(x) = 0$ .

3. Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-3}$  de  $a$ .

**Exercice 3 (3 points)**

Soit  $f$  définie sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  par :  $f(x) = x \cos x - 2 \sin x$ .

1. Étudier la parité de  $f$ .

2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  et calculer  $f'(x)$ .

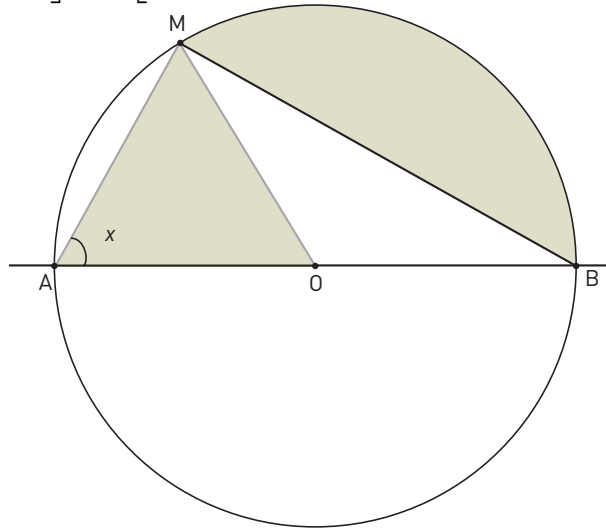
3. Montrer que  $f'$  est dérivable sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  et calculer  $f''(x)$ .

4. Dresser le tableau de variation de  $f'$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . En déduire le signe de  $f'$ .
5. Dresser alors le tableau de variation de  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

### Exercice 4 (5 points)

On considère un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 1. Soit  $[AB]$  un de ses diamètres. Pour tout point  $M$  de  $\mathcal{C}$  différent de  $A$  et  $B$ , on note  $x = \widehat{OAM}$  de sorte que  $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .

On désire comparer l'aire  $f(x)$  du triangle  $OAM$  et l'aire  $g(x)$  du domaine délimité par le segment  $[BM]$  et le petit arc  $\widehat{BM}$  de  $\mathcal{C}$ .



1.
  - a. Montrer que les triangles  $OAM$  et  $OBM$  ont la même aire.
  - b. Calculer les angles du triangle  $OAM$ . En déduire l'angle  $\widehat{BOM}$  en fonction de  $x$ .
2. Montrer que, pour tout  $x$  de  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ,
 
$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2}.$$
3. En déduire que pour tout  $x$  de  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ,
 
$$g(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}.$$
4. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  par
 
$$h(x) = f(x) - g(x) = \sin(2x) - x.$$
  - a. Calculer  $h'(x)$ .
  - b. Étudier le signe de  $\cos(2x) - \frac{1}{2}$  sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .
  - c. En déduire le tableau de variation de  $h$  sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .
  - d. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  de  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $h(\alpha) = 0$ . En donner un encadrement d'amplitude  $10^{-3}$ .
5. Répondre au problème initial et comparer les aires  $f(x)$  et  $g(x)$  des deux domaines grisés.

Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :

connectez-vous à votre site de formation [www.cned.fr](http://www.cned.fr) > [espace inscrit](#)

et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

**Important**

Veillez réaliser ce devoir après avoir étudié **la séquence 3**.

**Exercice 1 (3 points)**

Chacune des cartes du jeu Pikaman est affectée de points de vie (PV). Sur l'ensemble des cartes en circulation, 5 % seulement, sont affectées d'un nombre de points PV supérieur ou égal à 120, ces cartes sont appelées *cartes-argent*.

Un tournoi est organisé dans la cour de récréation. Pour participer, chaque concurrent doit mettre en jeu 3 *cartes-argent*.

Samuel vient d'acheter 4 paquets de 6 cartes et compte ainsi pouvoir, avec ses seules cartes, participer à l'épreuve. Quelle est la probabilité qu'il y arrive ?

**Exercice 2 (4 points)**

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. On demande d'écrire sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Pour chaque question, la réponse rapporte un point, une absence de réponse est notée 0, une réponse fautive enlève 0,5 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue 5 tirs supposés indépendants. La probabilité que le tireur rate exactement trois fois la cible est :  
a. 0,1323      b. 0,3087      c. 0,47178      d. 0,01323
2. Une urne contient au total  $n$  boules dont cinq sont blanches et les autres noires. On effectue 10 tirages successifs en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. La plus petite valeur de l'entier  $n$  pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les 10 tirages est supérieure ou égale à 0,9999, est égale à :  
a. 8      b. 13      c. 14      d. 21
3. On désigne par  $A$  et  $B$  deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité  $P$ . On sait que  $P(A \cup B) = 0,9$  et  $P(\bar{B}) = \frac{3}{4}$ . La probabilité de l'événement  $A$  est égale à :  
a.  $\frac{8}{15}$       b.  $\frac{2}{3}$       c.  $\frac{13}{15}$       d.  $\frac{13}{20}$

4. On lance une pièce de monnaie équilibrée,  $n$  fois de suite (avec  $n > 1$ ) de façon indépendante. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois « Pile » et une fois « Face » ?

- a.  $1 - \frac{1}{2^n}$       b.  $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$       c.  $1 - \frac{1}{2^{2n}}$       d.  $1 - \frac{n}{2^n}$ .

### Exercice 3 (3 points)

On estime à 0,02 la proportion de pièces défectueuses parmi les pièces produites par une usine. Une machine malheureusement imparfaite permet de tester si une pièce est défectueuse ou non. On prend une pièce au hasard.

On note  $A$  l'événement « la pièce est bonne » et  $B$  l'événement « la machine considère la pièce bonne ».

La machine est fiable à 99 %. Autrement dit :  $P_A(B) = P_A(\bar{B}) = 0,99$ .

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Calculer  $P(B)$ .
3. La machine considère la pièce défectueuse. Quelle est la probabilité (à  $10^{-4}$  près) qu'elle soit vraiment défectueuse ?

### Exercice 4 (5 points)

Une urne contient 2 dés équilibrés indiscernables au toucher :

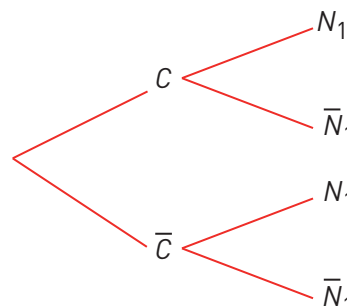
- ▶ un dé cubique  $d_1$  dont les faces sont numérotées de 1 à 6 ;
- ▶ un dé cubique  $d_2$  dont les faces sont numérotées 2, 2, 4, 4, 6 et 6.

On prend au hasard un dé dans l'urne et on le lance  $n$  fois de façon indépendante. On note :

- ▶  $C$  l'événement « le dé tiré est le dé  $d_1$  » ;
- ▶  $N_1$  l'événement « on obtient un nombre pair au 1<sup>er</sup> lancer du dé ».

#### Partie I

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.
2. Calculer  $P(N_1)$ .
3. Déterminer la probabilité d'avoir tiré le dé  $d_1$  sachant que l'on a obtenu un nombre pair.



#### Partie II

On tire au hasard un dé de l'urne. Si celui-ci est  $d_1$ , on le lance  $n$  fois, sinon on ne le lance qu'une fois. On note  $N_n$  l'événement « n'obtenir que des nombres pairs ».

1. En remarquant que  $N_n = (N_n \cap C) \cup (N_n \cap \bar{C})$ , montrer que :

$$P(N_n) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}.$$

2. Quelle est la probabilité  $p_n$  d'avoir tiré le dé  $d_1$  sachant que l'on n'a obtenu que des nombres pairs ?

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

## Exercice 5 (5 points)

### Partie I

On lance deux dés équilibrés et on considère la variable aléatoire  $Y$  donnant le plus petit des deux nombres inscrits sur les faces supérieures des dés.

À l'aide d'un tableau comme le tableau ci-dessous donnant le plus petit des résultats obtenus par les deux dés, déterminer la loi de probabilité de  $Y$ .

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1					
3						
4						
5						
6						

### Partie II

Lors d'une fête, on tire une boule dans une urne contenant  $k$  boules dont exactement 1 blanche. Si la boule tirée est noire, le jeu s'arrête. Si elle est blanche, on lance deux dés et on gagne, en euros, le plus petit des résultats obtenus par les deux dés.

Une partie coûte  $a$  euros. Un joueur joue une partie.

On note  $X$  le gain algébrique (par exemple, si la boule tirée est noire, on a :  $X = -a$ ). On a donc :

$$X(\Omega) = \{-a ; 1-a ; \dots ; 6-a\}.$$

- On considère l'événement suivant  $B$  : « la boule tirée est blanche ».
  - Déterminer  $P(B)$ . Justifier que :  $P(X = -a) = 1 - \frac{1}{k}$ .
  - Pourquoi a-t-on  $P_B(X = 1-a) = \frac{11}{36}$  ? En déduire  $P(X = 1-a)$ .
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .
- En déduire  $E(X)$ .
- Montrer que le jeu est équitable si et seulement si  $36ak = 91$ .
- Quel est le nombre minimum de boules noires pour que le jeu soit équitable et qu'une partie coûte moins de 50 centimes d'euros ?

Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :

connectez-vous à votre site de formation [www.cned.fr](http://www.cned.fr) > espace inscrit

et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

### Important

Veillez réaliser ce devoir après avoir étudié la séquence 4.

## Exercice 1 (5 points)

### Restitution Organisée des Connaissances

On suppose connus les résultats liés à la dérivabilité de  $v$  définie par  $v(x) = u(ax+b)$  où  $a$  est un réel non nul,  $b$  un réel et  $u$  une fonction dérivable ainsi que les résultats suivants relatifs à la fonction exponentielle.

a. La fonction  $\exp$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifie  $\exp' = \exp$ .

b.  $\exp(0) = 1$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ .

2. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $x$ ,  $\exp(a+x) = \exp(a) \times \exp(x)$ .

On pourra considérer la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \exp(a+x) \times \exp(-x)$ .

3. On considère les fonctions notées  $\text{ch}$  et  $\text{sh}$  définies pour tout réel  $x$  par :

$$\text{sh}(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \text{ et } \text{ch}(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)).$$

a. Montrer que les fonctions  $\text{sh}$  et  $\text{ch}$  sont dérivables et déterminer leurs fonctions dérivées.

b. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ .

c. Montrer que pour tous  $a, b$  de  $\mathbb{R}$ ,  $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$ .

## Exercice 2 (9 points)

### Partie A

Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^x + x + 1$ .

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

2. Dresser le tableau de variation de  $g$ .

3. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution réelle  $\alpha$ . Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .

4. Déterminer le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

## Partie B

Soit  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ .

- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .
- Montrer que  $h'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe.
- Montrer que  $h(\alpha) = \alpha + 1$ . En déduire un encadrement de  $h(\alpha)$ . Dresser le tableau de variation de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Partie C

On s'intéresse aux fonctions  $f$  définies, dérivables sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant :

$$(C) : \begin{cases} f(0) = 0 \\ \text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, f(x) - f(-x) = x \end{cases}$$

- Montrer que  $h_0$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h_0(x) = x^2 + \frac{x}{2}$  vérifie les conditions (C).
- Montrer que  $h$  vérifie les conditions (C).
- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.  
Soit  $f$  vérifiant (C).
  - Déterminer la fonction dérivée de  $g : x \mapsto f(x) - f(-x)$ .
  - Montrer que :  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .
  - On suppose que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq -1$ . Que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ?
  - On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ . Soient  $x$  un réel non nul,  $M$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $x$ ,  $M'$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $(-x)$  et  $\Delta$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0. Montrer que :  $(MM') \parallel \Delta$ .

## Exercice 3 (6 points)

On rappelle l'inégalité :

► pour tout réel  $x$ ,  $e^x \geq 1 + x$

et on admet que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

►  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $u_n = \exp\left(\frac{0^2}{n}\right) + \exp\left(\frac{1^2}{n}\right) + \exp\left(\frac{2^2}{n}\right) + \dots + \exp\left(\frac{n^2}{n}\right)$  et  $v_n = \frac{u_n}{n}$ .

- Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n \geq n+1$ . En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_n \geq \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$  puis que  $v_n \geq \frac{2n+1}{6}$  (\*).
- On considère l'algorithme suivant où l'utilisateur entre un entier naturel  $n$ .  
 $u \leftarrow 0$   
 Pour  $i$  variant de 0 à  $n$   
 $u \leftarrow u + \exp\left(\frac{i^2}{n}\right)$   
 Fin pour

- a. Donner une valeur approchée de la valeur affichée par cet algorithme lorsque  $n = 3$ .
- b. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur  $v$  de  $v_n$  lorsque l'utilisateur entre la valeur de  $n$ .

**4.**

- a. Justifier qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $v_n \geq 10^3$ .
- b. À l'aide de l'inégalité (\*), trouver un entier  $n_1$  tel que pour tout  $n \geq n_1$ , on ait  $v_n \geq 10^3$ .
- c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On admet que la suite  $(v_n)$  est croissante. Trouver le plus petit entier  $n_2$  tel que pour tout  $n \geq n_2$ , on ait  $v_n \geq 10^3$ .

Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :

connectez-vous à votre site de formation [www.cned.fr](http://www.cned.fr) > *espace inscrit*

et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

### Important

Veillez réaliser ce devoir après avoir étudié **la séquence 5**.

### Exercice 1 (6 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^3 + 1)$ .

1. Montrer que  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ . Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; 1]$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

2.

a. Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ .

b. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$ .

3. On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; 1]$  par  $g(x) = x - f(x)$ .

a. On a effectué les calculs suivants à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

The screenshot shows the Xcas interface with the following steps and results:

- $g0 := x - 1/2 * \ln(x^3 + 1)$   

$$x - \frac{\ln(x^3 + 1)}{2}$$
- $g1 := \text{diff}(g0)$   

$$1 - \frac{1}{2} * \left( \frac{1}{x^3 + 1} \right) * 3 * x^2$$
- $g2 := \text{diff}(g1)$   

$$-\frac{1}{2} * (-3 * x^2) * \left( \frac{1}{x^3 + 1} \right) * 3 * x^2 - \frac{1}{2} * \left( \frac{1}{x^3 + 1} \right) * 3 * 2 * x$$
- $\text{factor}(g2)$   

$$\frac{3 * x * (x^3 - 2)}{2 * (x + 1)^2 * (x^2 - x + 1)^2}$$
- $\text{subst}(g1, x=1)$   

$$\frac{1}{4}$$

À quels calculs correspondent les 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> lignes de cette feuille de calcul ?

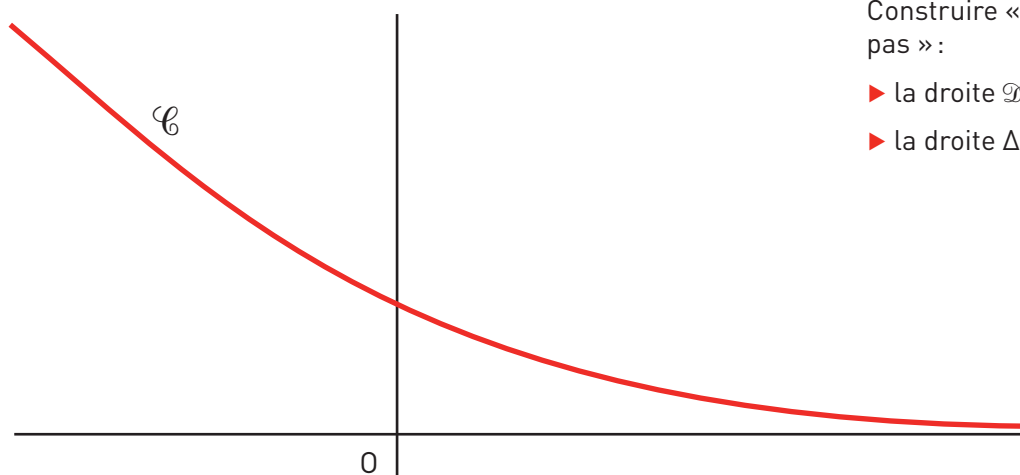
- À partir de ces calculs, déterminer le sens de variation de la fonction  $g'$  sur  $[0; 1]$ .
- En déduire le signe de  $g'$  sur  $[0; 1]$  puis le sens de variation de  $g$  sur  $[0; 1]$ .
- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans  $[0; 1]$  que l'on précisera.

4. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### Exercice 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.

- Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement.
- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$ . On dit que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = -x$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$ .
- Étudier les positions relatives de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ .
- Soit A le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse 0 et  $\Delta$  la tangente à  $\mathcal{C}$  en A.
  - Déterminer l'équation réduite de  $\Delta$ .  
On note B (resp. C) l'intersection de  $\Delta$  avec l'axe des abscisses (resp. la droite  $\mathcal{D}$ ).
  - Déterminer les coordonnées de B et de C.
  - Montrer que A est le milieu de  $[BC]$ .
- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Sur le graphique ci-après sont représentées les droites d'équation  $x = 0$  et  $y = 0$  et la courbe  $\mathcal{C}$ . (l'unité utilisée n'apparaît pas).



Construire « à la règle et au compas » :

- ▶ la droite  $\mathcal{D}$ ;
- ▶ la droite  $\Delta$ .

### Exercice 3 (9 points)

#### Partie I

1. Montrer que pour tout  $u > -1$ ,  $\ln(1+u) \leq u$ . (\*) (On pourra étudier une fonction)
2. Montrer que si  $x > -1$  alors  $\frac{-x}{1+x} > -1$ .
3. En appliquant l'inégalité (\*) à  $u = \frac{-x}{1+x}$ , montrer que pour tout  $x > -1$ ,  $\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$ . (\*\*)
4. Dédire des inégalités (\*) et (\*\*) que pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .

#### Partie II

Soit  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ .

1. En appliquant l'inégalité de la partie 1 à  $k = n+1, \dots, n+(n-1), 2n$ , montrer que :

$$u_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \leq \ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq u_n.$$

2. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :  $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) + \frac{n}{(n+1)(2n+1)}$ .

3. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

#### Partie III

On admet que la suite  $(u_n)$  est croissante.

1. Justifier l'existence d'un rang  $n_0$  à partir duquel :  $\ln 2 - 0,01 \leq u_n \leq \ln 2$ .
2. On cherche le plus petit entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\ln 2 - 0,01 \leq u_n \leq \ln 2$ .
  - a. Pourquoi suffit-il de chercher le plus petit entier  $n_1$  tel que,  $\ln 2 - 0,01 \leq u_{n_1} \leq \ln 2$  ?
  - b. On a implémenté l'algorithme suivant qui permet de déterminer :
    - le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n \geq \ln 2 - 0,01$
    - la valeur  $u$  de  $u_n$  correspondant.

```

n ← 1
u ← 0,5
tant que ..... (1)
  n ← n + 1
  u ← 0
  Pour i allant de 1 à n
    u ← ..... (2)
  Fin pour
Fin tant que
  
```

Le devoir 6 est un **sujet de Bac Blanc** qui repose sur les 6 premières séquences. Il sera **disponible en ligne** à une date qui vous sera communiquée dans l'actualité du cours.

Vous trouverez sur votre espace de formation un devoir avec son corrigé pour la séquence 6.

Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :

connectez-vous à votre site de formation [www.cned.fr](http://www.cned.fr) > *espace inscrit*

et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

**Important**

Veillez réaliser ce devoir après avoir étudié **la séquence 7**.

**Exercice 1 (6 points)****Partie I**

On considère la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ .

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$ .

2.

a. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ .

b. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ .

3. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $u(x) > 0$ .

4.

a. Montrer que la fonction dérivée  $u'$  de  $u$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $u'(x) = -\frac{u(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

b. Dresser alors le tableau de variation de  $u$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie II**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$ .

1. Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ . En déduire le sens de variation de  $f$ .

2. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \ln [u(x)]$  (on pourra utiliser la question 4a de la partie I).

3. En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Exercice 2 (2 points)**

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Trouver deux réels  $a$  et  $b$ , avec  $a$  non nul, tels que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin(ax+b)$  vérifie les deux conditions suivantes.

**(C1)** Pour tout réel  $x$ ,  $f(x+2) = f(x)$ .

**(C2)** La valeur moyenne de  $f$  sur  $[0; 1]$  est  $\frac{1}{\pi}$ .

**Exercice 3 (6 points)**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On appelle  $f_n$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $f_n(x) = \frac{x}{1+x^n}$  et on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} dx.$$

1.

a. Trouver  $a$  et  $b$  réels tels que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $\frac{x}{1+x} = a + \frac{b}{1+x}$ .

b. En déduire une primitive de  $f_1$  sur  $[0; 1]$ .

c. Calculer alors  $I_1$ .

2. Montrer que  $I_2 = \frac{\ln 2}{2}$ .

3.

a. Étudier les variations de la suite  $(I_n)$ .

b. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $I_n \leq 1$ .

c. En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente.

4.

a. Montrer que pour tout  $u$  de  $[0; 1]$ ,  $1-u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$ .

b. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $x(1-x^n) \leq \frac{x}{1+x^n} \leq x$  (\*).

c. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$ . (On pourra intégrer les inégalités (\*)).

d. En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

**Exercice 4 (6 points)**

Soit  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = e^{x^2-x}$ . On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie I**

1. Calculer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; 1]$ .

2. Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $f(x) = f(1-x)$ .

3. On admet que  $\mathcal{C}$  admet un axe de symétrie. Donner une équation de cette droite (aucune justification n'est demandée).

## Partie II

Soit  $g$ ,  $G$  et  $H$  définies sur  $[0; 1]$  par :  $g(x) = x e^{x^2-x}$ ,  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$  et  $H(x) = G(x) - G(1-x)$ .

1.

a. Montrer que :  $H(1) - H(0) = 2G(1)$ .

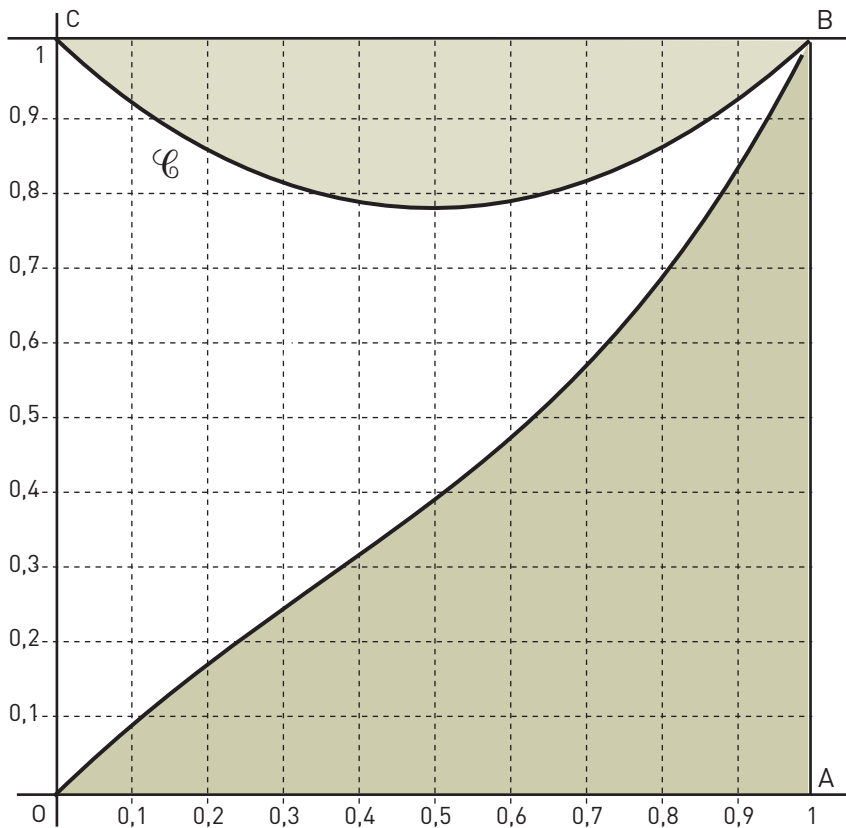
b. Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $H'(x) = e^{x^2-x}$ .

2. On note  $I = \int_0^1 e^{t^2-t} dt = \int_0^1 f(t) dt$  et  $J = \int_0^1 t e^{t^2-t} dt = \int_0^1 g(t) dt$ .

a. Montrer que :  $I = 2G(1)$ .

b. En déduire une relation entre  $I$  et  $J$ .

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(0; \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 10 cm), on considère les points  $A(1; 0)$ ,  $B(1; 1)$  et  $C(0; 1)$ . Les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  partagent le carré  $OABC$  en 3 domaines. Identifier la courbe représentant  $f$  et la courbe représentant  $g$ . Exprimer les aires des 3 domaines en fonction de  $J$ . En donner des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près.



Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :

connectez-vous à votre site de formation [www.cned.fr](http://www.cned.fr) > espace inscrit

et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

### Important

Veillez réaliser ce devoir après avoir étudié **la séquence 8**.

### Exercice 1 (5 points)

Soit  $m$  un nombre réel et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{m}{x} & \text{si } x \in [1 ; 10[ \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

#### Partie I

- Déterminer  $m$  pour que  $f$  soit une fonction de densité.
- Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ . On rappelle que  $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  soit :
  - ▶ si  $x \leq 1$ ,  $P(X \leq x) = 0$  ;
  - ▶ si  $1 < x \leq 10$ ,  $P(X \leq x) = \int_1^x f(t) dt$  ;
  - ▶ si  $x > 10$ ,  $P(X \leq x) = 1$ .
- a. Exprimer pour tout  $x > 0$ ,  $P(X \leq x)$  en fonction de  $x$ .
- b. Calculer  $P(1 \leq X < 2)$ .
- c. Soit  $a \in [0,2 ; 1]$ . Montrer que  $P(1 \leq a \cdot X < 2)$  ne dépend pas de  $a$ .

#### Partie II

Soit  $X_1$  une variable aléatoire de densité  $f$  et  $X_2$  définie par :  $X_2 = 0,5 \cdot X_1$ .

- Montrer que  $P(X_2 \geq 5) = 0$  et que  $P(0,5 \leq X_2 < 1) = \frac{\ln 2}{\ln 10}$ .
- Compléter le tableau ci-après.

Événement	$X_2 < 0,5$	$0,5 \leq X_2 < 1$	$1 \leq X_2 < 2$	$2 \leq X_2 < 3$	$3 \leq X_2 < 4$	$4 \leq X_2 < 5$	$X_2 \geq 5$
Probabilité							

**Exercice 2 (5 points)**

Lucie se rend à l'université en vélo (à vitesse constante). Le trajet dure alors 20 minutes. Certains jours (en moyenne, 1 jour sur 5), elle s'aperçoit, après être partie, qu'elle a oublié quelque chose. Si c'est le cas, elle s'en rend compte après  $T$  minutes où  $T$  suit la loi uniforme sur  $[0; 20]$ , elle fait alors immédiatement demi-tour, rentre chez elle (à la même vitesse qu'à l'aller), elle prend ce qu'elle a oublié (1 minute pour cela) et repart cette fois-ci en voiture pour aller plus vite. Elle arrive alors à l'université 10 minutes plus tard.

On note  $A$  l'événement : « Lucie s'aperçoit qu'elle a oublié quelque chose » et  $D$  la variable aléatoire égale au temps mis par l'étudiante pour se rendre à l'université.

- Considérons les jours où Lucie s'est aperçu qu'elle avait oublié quelque chose. La variable aléatoire  $X$  représente la durée totale du trajet (en minutes).
  - Montrer que :  $X = 2T + 11$ .
  - Montrer que :  $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-11}{2} \leq T \leq \frac{b-11}{2}\right)$ . En déduire que  $X$  suit une loi uniforme sur un intervalle que l'on déterminera.
- Ce matin, Lucie se rend à l'université.
  - Montrer que  $P(D = 20) = 0,8$ .  
(on pourra écrire :  $P(D=20) = P(A) \times P(X=20) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(D=20)$  ).
  - La variable aléatoire  $D$  suit-elle une loi à densité (ou loi continue) ?
  - Déterminer  $P(D \leq 30)$ .
- Un matin, Lucie s'est rendue à l'université en moins d'une demi-heure. Quelle est la probabilité qu'elle ait dû faire demi-tour ce matin-là parce qu'elle avait oublié quelque chose ?

**Exercice 3 (4 points)**

La durée de vie (en années) d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda=0,1$ .

**Partie I - Restitution Organisée des Connaissances**

- Montrer que, pour tous  $a, b$  tels que  $0 \leq a \leq b$ ,  $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ .
- Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $P(X \geq x) = e^{-\lambda x}$ .

**Partie II**

On considère un des composants électroniques.

- Calculer la probabilité que sa durée de vie soit :
  - ▶ comprise entre 6 et 12 ans ;
  - ▶ supérieure à 20 ans.
- Sachant que le composant a 6 ans, quelle est la probabilité qu'il attende encore au moins 5 années ?
- Quelle est la durée de vie moyenne d'un tel composant ?
- Quelle est la durée de vie  $t$  telle que  $P(X \leq t) = \frac{1}{2}$  ?

### Exercice 4 (6 points)

Pour équiper les roues de ses vélos, Cathy, une cycliste confirmée dispose de deux types de chambres à air :

- ▶ 60 % sont de la marque Aplein (1) ;
- ▶ les autres de la marque Apla (2).

Pour son vélo, elle n'utilise que des chambres à air qui n'ont jamais crevé (elle donne, après réparations, les chambres à air qui ont crevé à son jeune frère).

La distance  $D_1$  (en km) parcourue sans crevaison par une roue arrière équipée d'une chambre à air Aplein suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_1 = 2 \times 10^{-3}$  et la distance  $D_2$  (en km) parcourue sans crevaison par une roue arrière équipée d'une chambre à air Apla suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_2 = 3 \times 10^{-3}$ .

#### Partie A

Cathy équipe la roue arrière de son vélo d'une chambre à air Aplein.

1. Montrer que la probabilité qu'elle puisse effectuer au moins 300 km sans que cette roue ne crève est de 0,55 à  $10^{-2}$  près.
2. Montrer que la probabilité que son pneu arrière crève entre 400 et 500 km est de :  $e^{-400\lambda_1} - e^{-500\lambda_1}$ .
3. Deux semaines plus tard, elle a effectué 600 km sans crever. Quelle est la probabilité qu'elle puisse en effectuer 300 de plus sans que sa roue arrière ne crève ?

#### Partie B

On note  $A_1$  (resp.  $A_2$ ) la distance parcourue par une roue avant équipée d'un pneu Aplein (resp. Apla). On suppose que les variables aléatoires  $A_1$  et  $A_2$  suivent des lois exponentielles.

Une étude statistique affirme que l'on effectue deux fois plus de kilomètres sans crever de la roue avant que de la roue arrière. On peut interpréter ce résultat grâce aux formules :  $E(A_1) = 2 \times E(D_1)$  et  $E(A_2) = 2 \times E(D_2)$ .

1. Déterminer les paramètres des lois exponentielles suivies par  $A_1$  et  $A_2$ .
2. Compléter le tableau suivant donnant les paramètres des lois exponentielles associées aux distances parcourues sans crevaison par les roues selon leur emplacement et la chambre à air.

Emplacement de la roue \ Marque	Aplein	Apla
Avant		
Arrière	$2 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-3}$

3. Cathy a équipé ses deux roues de chambres à air Aplein. Montrer que la probabilité qu'elle effectue plus de  $d$  kilomètres sans qu'aucune de ses roues ne crève est :  $P(A_1 \geq d) \times P(D_1 \geq d) = e^{-3 \times 10^{-3} d}$ .

#### Partie C

Cathy choisit, au hasard, une nouvelle chambre à air pour sa roue arrière et une nouvelle chambre à air pour sa roue avant. Soit  $D$  (en km) la distance parcourue avant crevaison.

1. Démontrer que la probabilité qu'il n'y ait pas de crevaison avant  $d$  km est :  $P(D \geq d) = 0,36e^{-3 \times 10^{-3} d} + 0,24e^{-4 \times 10^{-3} d} + 0,24e^{-3,5 \times 10^{-3} d} + 0,16e^{-4,5 \times 10^{-3} d}$ .
2. Calculer la probabilité qu'elle crève dans les 100 premiers kilomètres.

Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :

connectez-vous à votre site de formation [www.cned.fr](http://www.cned.fr) > *espace inscrit*

et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

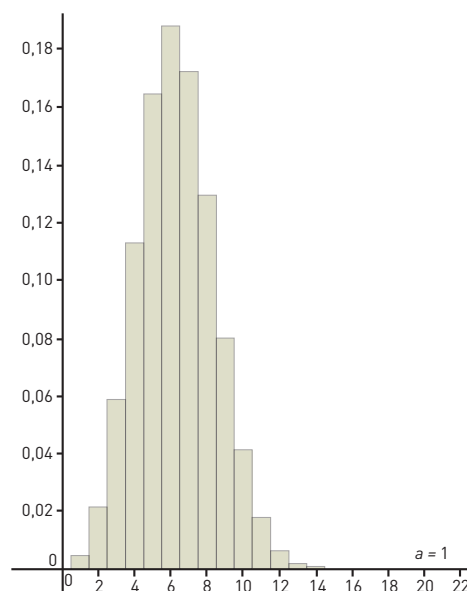
### Important

Veillez réaliser ce devoir après avoir étudié **la séquence 9**.

### Exercice 1 (5 points)

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. On demande d'écrire sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Pour chaque question, la réponse rapporte un point, une absence de réponse est notée 0, une réponse fautive enlève 0,5 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. L'histogramme ci-contre représente la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  avec :
  - a.  $n = 21$  et  $p = 0,3$  ;
  - b.  $n = 21$  et  $p = 0,2$  ;
  - c.  $n = 22$  et  $p = 0,3$  ;
  - d.  $n = 22$  et  $p = 0,2$ .



Pour les 4 questions suivantes,  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0; 1)$  de moyenne 0 et d'écart type 1 et  $Y$  la loi normale

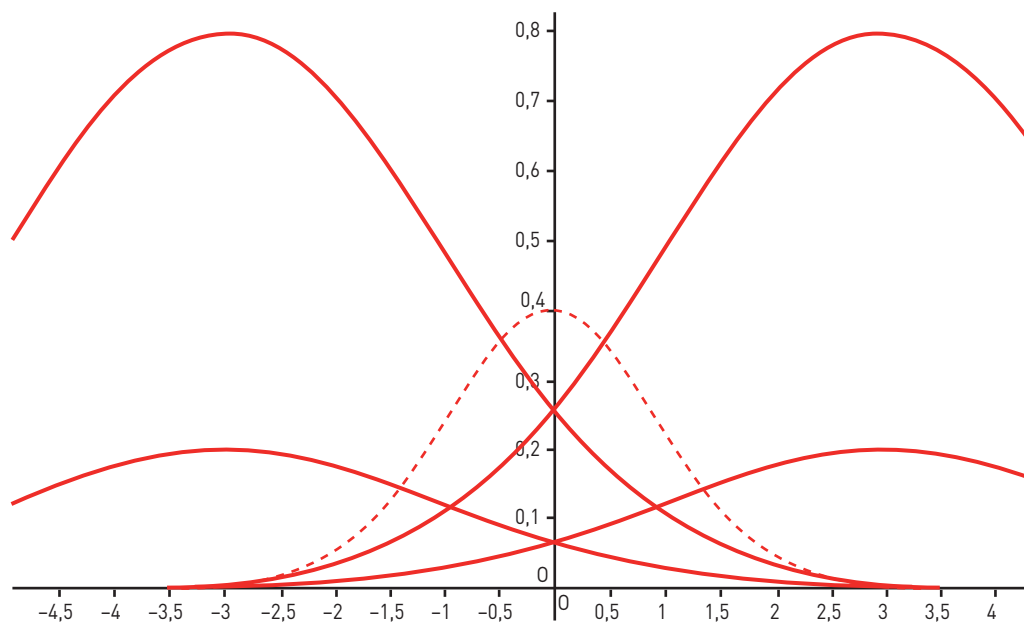
$\mathcal{N}(3; 2^2)$  de moyenne 3 et d'écart type 2.

2. Soit  $u$  tel que  $P(-u \leq X \leq u) = 0,6$ .

On a :

- a.  $P(X < u) = 0,2$  et  $u \approx 0,25$  ;
- b.  $P(X < u) = 0,8$  et  $u \approx 0,84$  ;
- c.  $P(X < u) = 0,2$  et  $u \approx 0,84$  ;
- d.  $P(X < u) = 0,8$  et  $u \approx 0,25$ .

3. Préciser parmi les courbes ci-dessous, celle qui représente la densité de probabilité de  $Y$ .



4. On a :

a.  $P(Y \leq 2) = P\left(X \leq -\frac{1}{2}\right)$  ;

b.  $P(Y \leq 2) = P(X \leq 7)$  ;

c.  $P(Y \leq 2) = P\left(X \leq -\frac{1}{4}\right)$  ;

d.  $P(Y \leq 2) = P(X \leq 11)$ .

5. Soit  $v$  tel que :  $P(-v \leq Y \leq v) = 0,95$ . On a :

a.  $v \approx 7$  ;

b.  $v \approx 6,3$  ;

c.  $v \approx 14$  ;

d.  $v \approx 7,8$ .

### Exercice 2 (3 points)

Une entreprise fabrique un jouet qui projette vers le haut une « puce » que les enfants doivent essayer d'attraper. La hauteur maximale  $X$  atteinte par la puce suit la loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ .

La machine est conçue pour que dans 75 % des cas, la puce atteigne une hauteur comprise entre 10 et 15 cm. Cependant, dans 7 % des cas, la puce dépasse les 15 cm.

1. Montrer que :  $P(X \geq 10) = 0,82$  et  $P(X \leq 15) = 0,93$ .

2. En déduire des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près de  $\frac{10-\mu}{\sigma}$  et  $\frac{15-\mu}{\sigma}$ .

3. À partir des valeurs précédentes, déterminer des valeurs approchées de  $\mu$  et  $\sigma$ .

4. À partir des précédents résultats, déterminer la probabilité que la puce atteigne une hauteur maximale comprise entre 8 et 12 cm.

### Exercice 3 (5 points)

Dans un centre commercial, un ascenseur permet de rejoindre le parking souterrain aux magasins. Cet ascenseur peut supporter 500 kg avant la surcharge.

#### Partie I

On considère la variable aléatoire  $X$  qui, à tout adulte usager de l'ascenseur, associe son poids en kg. On suppose que  $X$  suit la loi normale d'espérance mathématique 70 kg et d'écart type 15 kg.

1. Calculer  $P(65 \leq X \leq 80)$  et  $P(X \geq 100)$  (on donnera des valeurs approchées de ces résultats à  $10^{-2}$  près).
2. Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près du réel positif  $M$  tel que  $P(X \leq M) = 0,95$ . Interpréter le résultat obtenu à l'aide d'une phrase.

#### Partie II

On admet que le poids total de  $n$  adultes usagers de l'ascenseur, dont les poids sont indépendants, est une variable aléatoire  $Y_n$  qui suit la loi normale d'espérance mathématique  $70n$  kg et d'écart type  $15\sqrt{n}$  kg.

On note  $p_n$  la probabilité de surcharge quand il y a  $n$  adultes dans l'ascenseur :  $p_n = P(Y_n \geq 500)$ .

1. Calculer  $p_5$ ,  $p_6$ ,  $p_7$ ,  $p_8$  et  $p_9$  (on donnera des valeurs approchées de ces résultats à  $10^{-2}$  près).
2. Le nombre maximum  $n$  de personnes autorisées dans l'ascenseur est calculé de telle sorte que la probabilité que l'ascenseur soit en surcharge avec  $n$  adultes est inférieure ou égale à 0,01. Déterminer le nombre maximum de personnes pouvant entrer dans cet ascenseur.

### Exercice 4 (4 points)

Une société produit des bouteilles contenant un produit chimique à usage industriel. On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui associe, à chaque bouteille, sa contenance exprimé en  $\text{dm}^3$ . On admet que la variable aléatoire  $X$  suit la loi normale de moyenne  $40 \text{ dm}^3$  et d'écart type  $0,15 \text{ dm}^3$ .

#### Partie I

1. Quelle est la probabilité que la contenance d'une bouteille choisie au hasard soit inférieure à  $39,5 \text{ dm}^3$  ?
2. Quelle est la probabilité que la contenance d'une bonbonne choisie au hasard soit comprise entre  $39,8 \text{ dm}^3$  et  $40,3 \text{ dm}^3$  ?

#### Partie II

La société de distribution chargée de vendre ces bouteilles décide de ne pas vendre et de renvoyer au producteur, les bouteilles contenant moins de  $39,5 \text{ dm}^3$ .

La société de distribution reçoit les bouteilles par lot de 50. On note  $Y$  la variable aléatoire qui associe, à chaque lot, le nombre de bouteilles qui ne remplissent pas les conditions de vente.

1. Montrer que  $Y$  suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'un lot choisi au hasard parte entièrement à la vente ?
3. Déterminer la probabilité qu'un lot choisi au hasard présente au plus 2 bouteilles ne remplissant pas les conditions de vente.

**Exercice 5 (3 points)**

Dans une ville de taille moyenne, un sondage portant sur plusieurs questions dont une concernant l'aménagement du centre-ville a été fait auprès de personnes inscrites sur les listes électorales.

1. Les réponses des 500 personnes interrogées ont été analysées et il apparaît que 196 d'entre elles ne sont pas satisfaites des nouveaux aménagements. On appelle  $p$  la proportion des habitants de la ville insatisfaits de ces travaux. Donner une estimation de  $p$  avec un intervalle de confiance au niveau de 95 %.
2. L'adjoint au maire responsable de ce projet conteste ces résultats. Son argument est que l'échantillon des personnes interrogées n'est pas représentatif des utilisateurs car il y a 198 sympathisants de l'opposition parmi les 500 personnes interrogées alors que, sur les 3 548 électeurs de cette ville, il y a seulement 1 230 sympathisants de l'opposition. Que pensez-vous de cet argument (pour décider de la réponse, on expliquera comment on utilise un intervalle de fluctuation d'échantillonnage au seuil de 95 %) ?

Ce devoir est à réaliser sous forme numérique :

connectez-vous à votre site de formation [www.cned.fr](http://www.cned.fr) > espace inscrit

et suivez nos conseils pratiques pour déposer votre devoir et le faire corriger par internet.

**Important**

Veillez réaliser ce devoir après avoir étudié **la séquence 10**.

**Exercice 1 (7 points)**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On note I le milieu de [AB], J le milieu de [FG] et K défini par :  $\overline{EK} = \frac{2}{3}\overline{EF}$ .

On complétera la figure donnée ci-dessous au fur et à mesure.

**Partie I**

1. Placer sur la représentation en perspective cavalière du cube donnée en annexe, les points I, J et K.
2. Montrer que l'intersection des plans (IJK) et (ABC) est la parallèle à (JK) passant par I.
3. Construire alors le point d'intersection L du plan (IJK) et de la droite (BC).
4. Construire la section du cube par le plan (IJK).
5. Montrer que les droites (IK) et (JL) sont sécantes.

**Partie II**

On se place dans le repère  $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ . On note  $L(1; a; 0)$  où  $a \in [0; 1]$ .

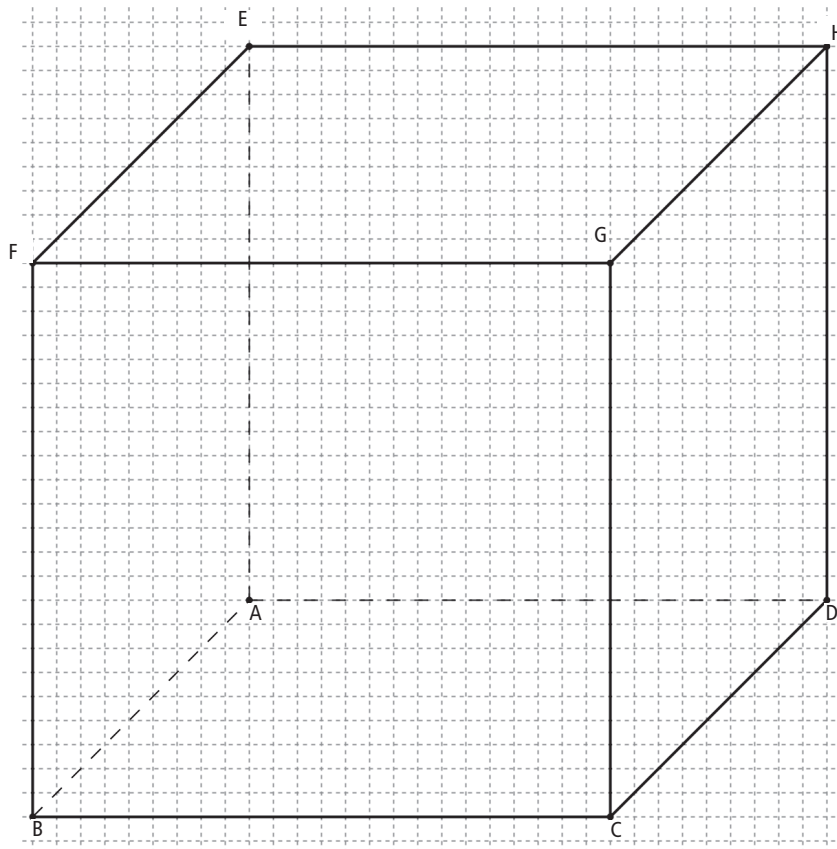
1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IK).
3. Démontrer que la droite (JL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2}+t'\left(a-\frac{1}{2}\right) \\ z=1-t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que  $a = \frac{3}{4}$  (on pourra utiliser le fait que les droites (IK) et (JL) sont sécantes).

## Partie III

1. Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan (IJK).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK).
3. Déterminer les coordonnées du point M intersection de la droite (DF) et du plan (IJK).
4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.  
Construire M.



## Exercice 2 (5 points)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(-1; 0; 2)$  et  $B(0; 1; -1)$  et les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

## Partie I

On suppose qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ .

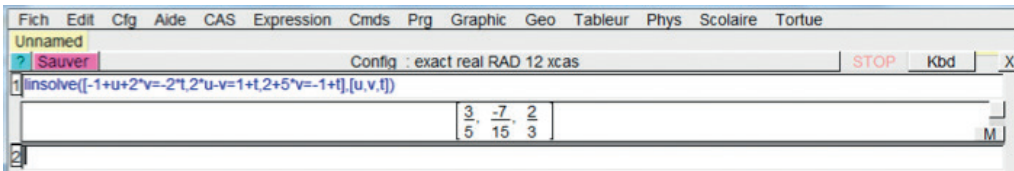
1. Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont 2 à 2 orthogonaux.
2. En déduire que :  $5a = 0$  et  $30b = 0$ .
3. Montrer alors que  $(A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est un repère de l'espace.

## Partie II

On note  $\mathcal{D}$  la droite  $(B; \vec{v})$  et  $\mathcal{P}$  le plan  $(A; \vec{u}, \vec{w})$ .

1. Donner une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ .
2. Donner une représentation paramétrique du plan  $\mathcal{P}$ .
3. La droite  $\mathcal{D}$  coupe-t-elle le plan  $\mathcal{P}$  en un point? Justifier.

On note  $I$  ce point. Pour déterminer ses coordonnées, on utilise un logiciel de calcul formel et on tape les instructions suivantes.



4. Interpréter le résultat précédent et, à partir de ces calculs, déterminer les coordonnées de  $I$ .
5. Montrer que la droite  $(I; \vec{w})$  est perpendiculaire aux droites  $(A; \vec{u})$  et  $(B; \vec{v})$ .

### Exercice 3 (4 points)

Soit  $OABC$  un tétraèdre tel que :

- les triangles  $OAB$ ,  $OAC$  et  $OBC$  sont rectangles en  $O$  ;
- $OA = OB = OC = 1$ .

On appelle  $I$  le pied de la hauteur issue de  $C$  de  $ABC$  et  $H$  le pied de la hauteur issue de  $O$  de  $OIC$ .

1. Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?
2. Démontrer que la droite  $(AB)$  est orthogonale au plan  $(COI)$ .
3. En déduire que les droites  $(OH)$  et  $(AB)$  sont orthogonales.
4. Montrer que  $(OH)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .
5. Calculer le volume du tétraèdre  $OABC$ .
6. En déduire  $OH$ .

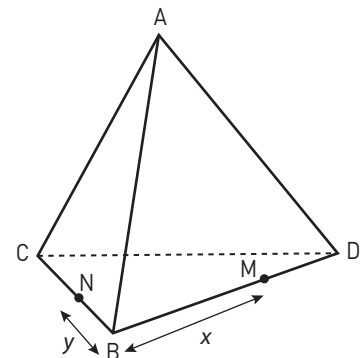
### Exercice 4 (4 points)

On considère un tétraèdre régulier  $ABCD$ . On se propose de démontrer que quel que soit  $M$  du segment  $[BD]$  et  $N$  du segment  $[BC]$ , la mesure de  $\widehat{MAN}$  est inférieure ou égale à  $\frac{\pi}{3}$ .

On pose  $BM = x$  et  $BN = y$  et on désigne par  $a$  l'arête du tétraèdre.

1. Exprimer en fonction de  $a$ ,  $x$  et  $y$  :
  - a.  $\overline{AB} \cdot \overline{BM}$  ;
  - b.  $\overline{BN} \cdot \overline{BM}$ .

2. Montrer que :
  - a.  $MA^2 = a^2 + x^2 - ax$  ;
  - b.  $NA^2 = a^2 + y^2 - ay$  ;
  - c.  $MN^2 = x^2 + y^2 - xy$ .



3. En déduire :  $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = \frac{a^2 + (a-x)(a-y)}{2}$ .
4. Montrer alors que :  $AM \leq a$ ,  $AN \leq a$  et  $\overline{AM} \cdot \overline{AN} \geq \frac{a^2}{2}$ .
5. Conclure.