TD n° 3. Les relations

1 Le produit cartésien et les relations

Définition 1 (Paire (ordonnée), n-uplet). *Étant donnés x_1, x_2, la* paire (ordonnée) *(ou* 2-uplet*) de x_1 et x_2 est :*

$$(x_1, x_2) = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}.$$

Étant donnés $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $x_1, \ldots, x_n$, le n-uplet *de $x_1, \ldots, x_n$ est :*

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$$

(la définition est par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, le cas de base étant pour $n = 2$).

Si x_1 est un ensemble, le 1-uplet *de x_1 est $(x_1) = x_1$.*

Si $n = 0$, le 0-uplet *de $x_1, \ldots, x_n$ est $(x_1, \ldots, x_n) = \emptyset$.*

On pourrait aussi définir, pour $n > 2$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, (x_2, \ldots, x_n))$. Parfois, on note le n-uplet de $x_1, \ldots, x_n$ par $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Fait 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et quels que soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ ssi $x_i = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*

PREUVE. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Cases de base. Si $n = 0$ alors il n'existe pas de $i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq n$, donc il n'y rien a prouver.

Si $n = 1$ alors $(x_1) = x_1$ et $(y_1) = y_1$ par définition, et $(x_1) = (y_1)$ par hypothèse. On conclut $x_1 = y_1$ par transitivité de $=$.

Si $n = 2$ alors l'hypothèse $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ signifie $\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} = \{\{y_1\}, \{y_1, y_2\}\}$. Par extensionnalité, on a :

(i) soit $\{x_1\} = \{y_1\}$ et $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$;

(ii) soit $\{x_1\} = \{y_1, y_2\}$ et $\{x_1, x_2\} = \{y_1\}$;

Dans le cas (i), de $\{x_1\} = \{y_1\}$, on déduit (par extensionnalité), $x_1 = y_1$. Comme $x_1 = y_1$, alors $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$ implique $x_2 = y_2$ (toujours par extensionnalité).

Dans le cas (ii), $\{x_1\} = \{y_1, y_2\}$ implique $x_1 = y_1 = y_2$ par extensionnalité et, pareillement, $\{x_1, x_2\} = \{y_1\}$ implique $x_1 = x_2 = y_1$. Donc, dans ce cas, $x_1 = x_2 = y_1 = y_2$.

Étape inductive (hérédité). Supposons que l'énoncé est vrai pour $n \geq 2$: i.e. si $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, alors $x_i = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$. Alors, par définition, $((x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}) = ((y_1, \ldots, y_n), y_{n+1})$. Par le dernier cas de base, ceci implique $x_{n+1} = y_{n+1}$ et $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$. Par hypothèse de récurrence, cette dernière égalité implique $x_i = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On a donc établi $x_i = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq n + 1$. □

Définition 3 (Produit cartésien, relation). *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_1, \ldots, a_n$ des ensembles quelconques.*

1. *Le* produit cartésien *de $a_1, \ldots, a_n$ est l'ensemble :*

$$a_1 \times \ldots \times a_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in a_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n\}.$$

2. *Une* relation R *entre les éléments de* $a_1, \ldots, a_n$ *est un sous-ensemble de* $a_1 \times \ldots \times a_n$. *Si* $a_1 = \ldots = a_n = a$, *on dit que* R *est une* relation n-aire *sur* a ; *en particulier, si* $n = 1$ *(resp.* $n = 2$*) alors on dit que* R *est un* prédicat *ou une* relation unaire *(resp. une* relation binaire*)*.

Remarque 4. Si $n = 0$ alors $a_1 \times \ldots \times a_n = \{\emptyset\}$ $(\neq \emptyset)$. Si $n = 1$ alors $a_1 \times \ldots \times a_n = a_1$.

Notation. Soient a un ensemble et R une relation binaire sur a. Pour tout x et y éléments de a, nous notons $x\,R\,y$ (resp. $x \not R\, y$ ou $\neg\, x\,R\,y$) le fait que $(x, y) \in R$ (resp. $(x, y) \notin R$).

On pose la *relation d'identité* sur l'ensemble a est $\mathsf{id}_a = \{(x, x) \mid x \in a\}$.

Exercice 1.

1. Décrire toutes les relations unaire possibles sur $\emptyset$.
2. Décrire toutes les relations binaire possibles sur $\emptyset$.
3. Décrire toutes les relations 0-aires possibles sur $\emptyset$.

2 Propriétés des relations

Définition 5 (Réflexivité, irréflexivité, symétrie, asymétrie, antisymétrie, transitivité). *Soient a un ensemble et R une relation binaire sur a. On dit que :*

1. R *est* réflexive *ssi* $\forall x\, (x \in a \to x\,R\,x)$;
2. R *est* irréflexive *ssi* $\forall x\, (x \in a \to \neg\, x\,R\,x)$;
3. R *est* symétrique *ssi* $\forall x \forall y\, (x\,R\,y \to y\,R\,x)$;
4. R *est* asymétrique *ssi* $\forall x \forall y\, (x\,R\,y \to \neg\, y\,R\,x)$;
5. R *est* antisymétrique *ssi* $\forall x \forall y\, ((x\,R\,y \wedge y\,R\,x) \to x = y)$;
6. R *est* transitive *ssi* $\forall x \forall y \forall z\, ((x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \to x\,R\,z)$.

Il est à noter que toutes ces propriétés s'énoncent par une formule qui est la quantification universelle d'un conditionnel.

Remarque 6.

1. L'unique relation binaire R sur $\emptyset$ est la relation vide. Elle satisfait toutes les propriétés 1-6 de la Définition 5, car dans ce cas, l'antécédent de chaque conditionnel est faux.
2. Si a est un ensemble non vide et R est la relation vide sur a, alors R satisfait toutes les propriétés 2-6 de la Définition 5 ; R ne satisfait pas la propriété 1 de la Définition 5, car il existe un élément x qui satisfait $x \in a$ (parce que $a \neq \emptyset$), mais aucun $x \in a$ satisfait $x\,R\,x$.

Fait 7. *Soient a un ensemble non vide et R une relation binaire non vide sur a.*

1. *R est réflexive et R est irréflexive sont incompatibles : si R est réflexive alors R n'est pas irréflexive.*
2. *R est réflexive et R est asymétrique sont incompatibles : si R est réflexive alors R n'est pas asymétrique.*
3. *Si R est asymétrique, alors elle est antisymétrique.*
4. *Si R est asymétrique, alors la relation R' définie par : $x\,R'y$ ssi $x\,R\,y \vee x = y$ est antisymétrique.*

5. *Si R est antisymétrique, alors la relation R' définie par : $x R' y$ ssi $x R y \wedge x \neq y$ est asymétrique.*

6. *Si R est symétrique et antisymétrique, alors $\forall x \forall y\,(x R y \to x = y)$, i.e. $R \subseteq \mathsf{id}_a$. Si, en plus, $\forall x\, \exists y\,(x R y)$, alors $R = \mathsf{id}_a$.*

PREUVE.

1. Supposons R réflexive ; comme $a \neq \emptyset$, alors il existe $x \in a$ et alors $x R x$ par réflexivité : donc, R n'est pas irréflexive.

2. (par RAA) Supposons que R soit réflexive et asymétrique et soit $z \in a$. Par réflexivité, $z R z$ et par asymétrie, $\neg z R z$, ce qui contredit la réflexivité de R.

   Question : Pourquoi si $a = \emptyset$, cet argument n'aboutit pas à une contradiction ?

3. Si R est asymétrique, alors quels que soient $x, y \in a$, $xRy \wedge yRx$ est faux. Donc $(xRy \wedge yRx) \to x = y$ est vrai, ainsi que sa généralisation universelle $\forall x \forall y\,((xRy \wedge yRx) \to x = y)$, i.e. R est antisymétrique.

4. Exercice.

5. Exercice.

6. Soient $x, y \in a$. Si $x R y$, alors par symétrie, $y R x$. Donc $xRy \to x R y \wedge y R x$, ce que, par antisymétrie, implique $x = y$; du coup, $(x, y) \in \mathsf{id}_a$. □

Exercice 2. Donner un ensemble non vide a et une relation binaire non vide R sur a telle que :

1. R n'est pas transitive ;
2. R n'est ni réflexive ni irréflexive ;
3. R n'est ni symétrique ni antisymétrique ;
4. R est réflexive et antisymétrique ;
5. R est réflexive et symétrique ;
6. R est réflexive et transitive ;
7. R est symétrique, antisymétrique et différente de id_a ;
8. Il existe $x \in a$, $y \in a$ tels que $\neg x R y$ et $\neg y R x$.
9. R est transitive, symétrique et non réflexive.

Exercice 3. Montrer que :

1. Toute relation antisymétrique et irréflexive est asymétrique.
2. Toute relation asymétrique est irréflexive.
3. Toute relation transitive et irréflexive est asymétrique.

Exercice 4.

1. Donner un exemple de relation transitive, symétrique et non réflexive.

2. Examiner l'argument suivant :

   Soient a un ensemble et R une relation symétrique et transitive sur a. Soit $z \in a$. Par symétrie, si zRy, alors yRz. Par transitivité, si zRy et yRz, alors zRz. Donc, si z est un élément quelconque de a, alors zRz, i.e. R est réflexive.

3. Soient a un ensemble et R une relation sur a. Montrer que si R est symétrique, transitive et $\forall z\,(z \in a \to \exists y\, zRy)$, alors R est réflexive.