Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte.

Vous noterez le numéro de la question, la réponse choisie ainsi qu'une justification de la réponse choisie.

Pour chaque question :

- il est attribué un point si la réponse est exacte avec une justification correcte ;
- il est attribué 0,5 point si la réponse est exacte avec une justification correcte mais incomplète ;
- une réponse inexacte enlève 0,5 point ;
- enfin une absence de réponse, une réponse exacte mais non justifiée ou une réponse exacte avec une justification fausse ou erronée est noté 0.

❶ Que vaut $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{2x-3}{x^2+2x-3}$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** 2 | **b.** $-\infty$ | **c.** $+\infty$ | **d.** 1 |

❷ Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{2x+3\cos x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

| | | |
|---|---|---|
| **a.** $f$ n'a pas de limite en $+\infty$ | **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\dfrac{1}{3}$ | **c.** $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$ comme asymptote en $+\infty$ |

❸ Soit $g$ la fonction définie par $g(x)=2x\sqrt{2x-4}$

| | | |
|---|---|---|
| **a.** $g'(2)=0$ | **b.** $g$ n'est pas dérivable en 2 | **c.** $g$ n'est pas continue en 2. |

❹ Soit $h$ la fonction définie par $h(x)=x^2\sin(2x)$

| | | |
|---|---|---|
| **a.** $h'(x)=2x\cos(2x)$ | **b.** $h'(x)=2x\sin(2x)+x^2\cos(2x)$ | **c.** $h'(x)=2x(\sin(2x)+x\cos(2x))$ |

## *Exercice 2*

## Partie A - Étude d'une fonction

Soit $f$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+x}{x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

❶ a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout $x$ de $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x)=\dfrac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}$.

c) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

❷ a) Montrer que $f$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que pour tout $x$ de $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x)=\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{1+x}}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}.$$

b) Dresser alors le tableau de variation de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

c) Montrer que : $f\left(\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]\right)\subset\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

## Partie B - Étude d'une suite

Soit $(u_n)$ définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

❶ Montrer, par récurrence, que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n\in\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

❷ Montrer, par récurrence, que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}<u_n$.

❸ En déduire que $(u_n)$ converge vers un réel $a$ solution de l'équation $f(x)=x$.

## Partie C - Propriété de a

Soit $g$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=x^3+x^2-1$.

❶ Montrer que $g$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

❷ Montrer que pour tout $x$ de $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x)=x \Leftrightarrow g(x)=0$. En déduire que $a$ est l'unique solution dans $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $g(x)=0$.

❸ Donner un encadrement d'amplitude $10^{-3}$ de $a$.